DE INVENTIONE,

ET ACTIONE VIRIUM CENTRIPETARUM

DISSERTATIO HABITA

a

PETRO ANGELO DINI

LUCENSI

Dato omnibus opponendi loco.

Lemma 1. (§. 1.)

Datur ratio realis, atque genuina ex prima Cauſa ad Corpus exiſtens.

Fig. 1.

Demonſtratio.

Sit A punctum Mathematicum, proinde in natura noſtra ideale tantum, quod dari tamen non inficiamur, quatenus paſſim excogitetur a Geometris. Sed ex puncti hujus, ac Mundi notione locum realiter in Univerſo affirmativè non habet, eſtque extra Mundum; & cum ſit quantumlibet multiplicatum ſimplex, & ſemper ſibi ipſi ſimile, licet illud hieroglyphicè comparare ad Cauſam primam; nam illa ſimplex eſt, extra Mundum, ſolumquè ſibi ipſi ſimilis, ac æqualis. Ultra etiam obſerva ab eodem puncto A formari lineam AB, ducendo ſcilicet punctum idem per ſpatium AB. Sed priuſquam ventum ſit ad partem finitam ipſius AB oportet incipere ab initio; nam pone creari prius partem aliquam, tunc dividi, ſi quanta eſt in partes aliquotas licet, undeque initium non eſt; ideo priuſquam veniatur ad quantum oportet tranſire per initium quanti, indeque ad quantum ſit ſaltus. Ideo a puncto mathematico ad initium linee in-

fini,

finitum intercedit, & ab extra ſubingredimur in Mundum; pariter ab initio lineæ ad lineam infinitum ineſt, & poſtea linea exiſtit. Concipe fluere lineam AB per ſpatium continuum uſque in CD, & tunc ABCD erit ſuperficies; & ſimili argumento, quo uſi ſumus in fluxione lineæ, utimur ad probandum quod ex linea fit tranſitus prius ad initium ſuperficiei, & ſtatim ſuperficies reſultat; nam linea ſemper linea revera eſt, & numquam pars ſuperficiei, nec illius initium, ſed ſolummodo illius terminos claudit; Unde patet & hinc a linea per infinitum fieri tranſitum ad initium ſuperficiei, & ab initio ſuperficiei per infinitum fieri tranſitum ad ſuperficiem. Concipe tandem fluere ſuperficiem ABCD in altum, ſeu in profundum, & ſtatim conficitur Corpus; & eadem, qua ſupra, ratione a ſuperficie ad initium Corporis fit tranſitus per infinitum, & per infinitum ab initio Corporis oportet pergere ad Corpus. Verum itaque eſt; quod ſuperficies eſt Cauſa Corporis, linea Cauſa ſuperficiei, ſed Cauſa ſuperficiei, ſeu prima eſt punctum mathematicum, quia ſimplicius excogitare non licet. Et ab eo tandem per ſex infinita intervalla fit tranſitus, ſeu manuducimur ad Corpus. Nota quod jam norunt Analyſtæ dividi quantitates in infiniteſimalia, & ſingula in infiniteſimalia ſecunda, & ſic de Cæteris uſque ad infinitum, quia natura non novit limites (*a*); Sed alia ratio eſt infiniteſimalium Analyſtarum, & alia initiorum quanti, ut infra. Patet adeo propoſitum. Q. E. D.

Corollarium 1. (§. 2.)

Hinc Vides Elementa Analyſtarum infiniteſimalia, niſi ultima, infinito abſunto, non eſſe initia quanti ſupra deſcripti, nec tamen adhuc a fortiori eſſe punctum reſpectu lineæ, linea reſpectu ſuperficiei, & ſuperficiem reſpectu Corporis, Sunt tamen ejuſdem generis cum initiis lineæ, niſi ejuſdem Speciei. Ne ſint ejuſdem Speciei hoc intereſt quia initium concipitur in ipſo inſtanti quo fluere incipit, ſed Elementa Analyſtarum ſupponuntur ex integro dato dividi in infiniteſima prima, ſecunda, tertia, &

ſic

(a) *Nevvt. in ſchol. rat. prim. & ultim. pag. 33. Edict. Amſtel. MDCCXXIII.*

ſic deinceps, unde vides intereſſe ab Analyſtarum primis Elementis ad initia, ſpecies infiniteſimalium infinitas. Eg. ſint lineæ CD, EF ſuppoſitæ diviſæ in infinitum quarum prioris infiniteſimale ſit A, poſterioris B, erit [nam ∞] eſt nota infinitatis] $\infty A = CD$, & $\infty B = EF$, unde prodit $\infty A : CD = \infty B : EF$. Vides itaque infiniteſima hic habere rationem ad integrum adeoque & in hoc caſu diverſa ſpeciê eſſe ab initiis lineæ, & ſic de cæteris, ſed genere cum illis comprehendi. Excluduntur tamen genere, & ſpecie horum Cauſæ Fig. 1.

Corollarium 2. (§.3.)

Vides etiam infinitum quod intercedit a puncto, ſeu linea, vel ſuperficie ad initium lineæ ſuperficiei, vel Corporis, non eſſe ejuſdem generis cum infinito intercedente ab initiis ad integra, nam initia infinite collecta formant extenſum aliquod, ſed Cauſæ, ſcilicet punctum linea, & ſuperficies formant initia quanti deſcripta, quæ tamen extenſa non ſunt, quatenus infiniteſima. Agnoſcitur adhuc ſimplicitas cauſæ, quia effectus illius per infinitum minime extenſus eſt. Sed initia non ſunt ita ſimplicia quia illorum effectus extenſi.

Corollarium 3. (§.4.)

Patet etiam quod colligi non poſſunt eadem homogenea ſumma, ſeu comparari eadem ratione infiniteſimalia particula lineæ & ſuperficiei, ſuperficiei & Corporis; & multominus lineæ & corporis, ſeu lineæ ſuperficiei & Corporis. Quia ab infiniteſimis lineæ infiniteſimis ſuperficiei ad infiniteſima Corporis plura infinita intercedunt.

Corollarium 4. (§.5.)

Hinc etiam invenire licet rationem, quam habent infiniteſimalia lineæ ſuperficiei, ac Corporis inter ſe. Conſtat enim [ex Geom.] proportionem lineæ ad lineam eſſe in ratione ſubduplicata ſuperficiei ad ſuperficiem, & rationem ſuperficiei ad ſuperficiem pariter ſubduplicatam Corporis ad Corpus. Ideo ſint CD, EF lineæ intellectæ diviſæ

Digitized by Google

Fig. 2. viſæ in infinitum, quarum infiniteſimale aliquod ſit A, & B, erit itaque [§. 2.] $\infty A : DC = \infty B : EF$, hoc eſt diviſim $A : DC = B : EF$, ſeu permutando $A : B = DC : EF$. Sint etiam ſuperficies IK, LM, & illorum infiniteſimalia G, & H, & eadem qua ſupra ratione erit $G : H = IK : LM$. Sint tandem QR, & ST Corpora, O, & P illorum infiniteſimalia, erit pariter ut ſupra $O : P = QR : ST$. His itaque conſtitutis, & integris ſimilibus poſitis, eſt:

$$A : B = DC : EF$$
$$G : H = IK : LM$$
$$O : P = QR : ST$$

Sed ex Geometria ut ſupra eſt

$$\overline{DC}^2 : \overline{EF}^2 = IK : LM$$
$$\overline{IK}^2 : \overline{LM}^2 = QR : ST$$

ergo

$$\overline{DC}^3 : \overline{EF}^3 = \overline{IK}^2 : \overline{LM}^2 = QR : ST$$

ſeu

$$A^3 : B^3 = G^2 : H^2 = O : P$$

Hoc eſt: ratio infiniteſimalium Corporum ad infiniteſimalia ſuperficierum, & infiniteſimalium ſuperficierum ad infiniteſimalia linearum eſt duplicata; ſed ratio infiniteſimalium Corporum ad infiniteſimalia linearum eſt triplicata.

Corollarium 5. [§. 6.]

Hinc patet quodſi inveniantur fluxiones quantitatum ſimiles, fluentes etiam, quoad variabilia ſimiles ſunt; & contra. Quæ ſunt fluentes, & integra variabilium Analyſtarum.

Corollarium 6. [§. 7.]

Apparet tandem quænam ſint Corpuſcula phyſica, ſeu vulgo puncta phyſica, nimirum infiniteſimalia Corporum, nec recenſeri poſſe in illorum numero infiniteſima ſuperficierum, & linearum, ſeu comparari eadem ratione.

Defi-

Digitized by Google

OPERE DEL SIGNOR CATANI DATE ALLA LUCE.

LA Litotomia dimoſtrata, e difeſa contro l' opinione del Medico-Ciruſico D. Giuſeppe Ventura. In Venezia 1752. Nella Stamperia Remondini. . 8.

Rifleſſioni Fiſico-Mediche ſopra di un nuovo Antiliſſo, colle quali, ſecondo l' odierno ſiſtema di Teoria, e Prattica medicinale, ſi dimoſtra quanto divario accader poſſa, riſpetto alla *Idrofobia*, con diverſe ſcoperte di ſegreti. In Napoli 1756. preſſo Giuſeppe di Domenico e Vincenzo Manfredi. . . 4.

Memoria agli Eccellentiſſimi Signori Delegato, e Governadori della Regal Caſa Santa, ed Oſpedale degl' Incurabili, ovvero *Allegazione* Medico-Ciruſico Cronologica. In Napoli 1760. . 4.

Ragguaglio iſtruttivo ai principianti Profeſſori di Chirurgia, su di certa ſiderazione del Piè, ſopravenuta nel XIV. giorno, ſucceſſivo alla Litotomia. In Napoli 1765. . 4.

Il Litotomo in pratica ovvero diviſamento regolare delle Operazioni di Litotomia, coll' ordine de' Tempi e Metodi: Individuazione delle cagioni de' Calcoli: loro Storie, circa la guarigione di quelle Perſone, a Cui fatte ſi ſono; come del Peſo

Digitized by Google

Definitio 1. (§. 8.)

Maſſa Corporis eſt materia ipſi cohærens, hoc eſt quæ una cum Corpore movetur & gravitat, ſeu agit.

Definitio 2. (§. 9.)

Moles ſeu volumem eſt expantio Corporis ſecundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

Corollarium 1. [§. 10.]

Hinc corpora ejuſdem denſitatis ſub eodem volumine æqualem maſſam continent.

Corollarium 2. (§. 11.)

Etſi duorum Corporum volumina fuerint æqualia, denſitates ſunt ut maſſæ

Corollarium 3. [§. 12.]

Etſi duo Corpora eandem denſitatem habuerint maſſæ ſunt ut volumina.

Lemma 2. [§. 13.]

Maſſæ duorum Corporum ſunt in ratione compoſita denſitatum, atque voluminum.

Demonſtratio

Sint trium Corporum maſſæ a, b, c, Volumina primi, & ſecundi d, tertii e, denſitas primi f, ſecundi, & tertii g; ſint nempe primum & ſecundum ejuſdem voluminis, ſecundum & tertium ejuſdem denſitatis. Quoniam

$$a : b = f : g \ [\text{§. 11.}]$$
$$b : c = d : e \ (\text{§. 12.})$$

erit . . . $ab : bc = fd : eg$.
conſequenter . $a : c = fd : eg$. Q. E. D.

Corollarium 1. (§. 14.)

Hinc ſi duorum Corporum maſſæ vel gravitates fuerint æquales, denſitates ſunt reciprocè ut volumina. Eſt enim [§. 13.] a : c = fd : ge, Jam a = c [per hipot] adeoque & fd = ge, eſt igitur f : g = e : d, Q.E.U. Quoniam gravitates [ex mech] ſunt ut maſſæ, ſi maſſæ æquales ſunt, etiam gravitates æquales ſunt. Sed ſi maſſæ æquales ſunt denſitates ſunt reciproce ut volumina (per demonſt.). Ergo etiam ſi gravitates æquales ſunt, denſitates reciprocè ſunt ut volumina. Q. E. D.

Axioma 1. [§. 15.]

Nihil eſt ſine ratione ſufficiente cur potius ſit, quam non ſit.

Hoc probatur pluribus argumentis innixo a Cel. Wolfio (*a*), ſed licet videatur ſubvereri Monſieur de Voltaire [*b*] an exceptionem patiatur hoc effatum Doctiſſimi Leibnitii in motu vertiginis Planetarum, quam ſubdubitationem olim explanavi, ſunt tot & tantæ illius naturales rationes, ut pro axioma tutiſſimè recipi poſſit.

Definitio 3. (§ 16.)

1. Vis Centripeta eſt, qua Corpora verſus punctum aliquod, tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcumque tendunt.

Hujus generis eſt gravitas, qua corpora tendunt ad Centrum terræ, & vis illa, quæcumque ſit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Eg. lapis in funda circumactus a circumagente manu abire conatur, & conatu ſuo fundam diſtendit; Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuo retrait, & in orbe retinet, quoniam in manum, ceu orbis centrum dirigitur Centripetam ap-

(a) *Ontol. Capit. 2. ſect. 1. parte prima pag. 51. & ſeq.*
[b] *Elem. della filoſ. del* Nevvt ; *tradotta dal franc. cap. 23. pag. 197.*

Digitized by Google

appellatur; ſed vis illi contraria, qua corpus e centro, ſeu manu cogitur abire Centrifuga dicitur. Ex illorum vero notione vires illæ Centrifuga ſcilicet, & Centripeta æquales ſemper deprehenduntur; ideo comuni nomine vires Centrales dicuntur. Eſt autem vis hujus Centripetæ quantitas trium generum Abſoluta, Acceleratrix, ac Motrix.
2. Vis centripetæ quantitas abſoluta eſt menſura ejuſdem major vel minor pro efficacia Cauſæ eam propagantis e centro per regiones in circuitu. Ut vis magnetica pro mole magnetis, vel intentione virtutis, major in uno magnete, minor in alio.
3. Sed vis Centripetæ quantitas acceleratrix eſt illius, menſura velocitati proportionalis; quam dato tempore generat.
4. At quantitas motrix eſt illius menſura proportionalis motui, quem dato tempore generat.
5. Dividi etiam poteſt vis Centripeta in abſolutam, & reſpectivam, & quænam ſit illorum ratio inferius exemplis docebimus.

Theorema 1. (§. 17.)

Vires Centripetæ decreſcunt e centro Corporis trahentis in triplicata ratione diſtantiarum reciprocè.

Demonſtratio

Sit nempe DbEB sphæræ attrahentis circulus major, A Corpuſculum attractum; intellige diviſam peripheriam circuli hujus in infiniteſimalia (§. 2.) B, B, b, b&c. Vires infiniteſimalium æque a corpuſculo A diſtantium æquales erunt (§. 15.), ideo exponere licet per æquales lineas A b, AB; ducantur lineæ Bb, quæ perpendiculares erunt axi DE per A tranſeunti eumque interſecabunt in punctis c. Vires AB, Ab dividuntur in vires Ac, Bc, & Ac, bc, quarum cum æquales cb, & cB ſint contrariæ ſe mutuo deſtruunt, unde penes Corpuſculum A idem valent vires A B + Ab, ac 2Ac, Infiniteſimalia b, B in perimetro Circuli ſunt infinita, ideo illorum vires exponuntur per ∞ (Ab + AB) = ∞ 2Ac (per demonſtr.); ideo diſtantia Ac eſt ut vires perimetri Circuli BED, ſeu lineales. Obſerva deinde non ſolum peripheriam, ſed circuli ſuperficiem *Fig.* 3.

Digitized by Google

planam BED diviſam in infiniteſimalia, quarum particulæ binæ B, b, æque diſtabunt ab A; ideo eodem quo ſupra argumento vires ſuperficiei erunt denuo $= \infty\ (AB + Ab).^{m}$ Concipe tandem rotare Circulum circa axem DE, & tunc (§. 1.) exiſtit Corpus, quod in infiniteſimalia diviſum intellectum, particulæ binæ B, b æque diſtabunt ab A, & erunt tandem vires integræ ſphæræ $= \infty [Ab + AB].^{n}$ Vires, autem particularum infiniteſimalium peripheriæ (per demonſtrata) ſunt ut 2Ac; ſed vires infiniteſimalium ſuperficiei erunt ut $\overline{2Ac}^{2}$; & Vires infiniteſimalium corporis, ſeu ſphæræ erunt ut $\overline{2Ac}^{3}$ (§.5.). Sed integra (§.2.) proportionalia ſuis infiniteſimis ſunt, ideo ſphæræ totius vires Centripetæ erunt ut $\overline{2Ac}^{3}$, ſeu quia 2. conſtans eſt ut $\overline{Ac}^{3}$. Q.E.U.

Sed vires in D lineales trahentes corpuſculum A, ſunt ad vires in E (per demonſtr) ut DA, ad AE, & hæ vires duæ conjunctim æquantur duplo lineæ AC, quod eſt proportionale vi trahenti Corpuſculum in centro Circuli C; nam AC eſt medium adamuſſim inter AD, & AE. Sit enim $AD = a$, $DC = b$, erit $AC = a + b$, & $AD + AE = 2a + 2b$. Igitur vires omnes quæ reductæ ſunt in axe DE ſunt ut $\infty\, 2AC$, At quia $\infty 2$ conſtans. ut AC, lineales vires ſcilicet, ſed totius ſphæræ [per demonſtr.] ut $\overline{AC}^{3}$ Q. E. A.

Demum vires omnes langueſcere in diſtantiis majoribus expanſæ deprehenduntur, ideo per decreſcentes accipi debent, unde tandem produnt vires centrales ut $\frac{1}{\overline{AC}^{3}}$.

Q. E. D. ſed hoc decrementum clarius infra.

Idem aliter.

Fig. 4. Sit ſphæra attrahens A expandens vires Centripetas inter ſe æquales (§. 16.) illæ quoquoverſum æqualiter expanduntur, ac continuo [§. 15.] rariores evadunt. Quia quas

Digitized by Google

PARAGRAPHUM QUINTUM

DISSERTATIONIS

PETRI ANGELI DINI

CLARIUS EXPOSITUM.

Hinc etiam invenire licet rationem, quam habent infiniteſimalia ſuperficierum ac corporum in figuris ſimilibus cum lateribus homologis. Conſtat enim [ex geom.] homologa latera eſſe in ratione ſubduplicata ſuperficierum ſimilium, atque in ratione ſubtriplicata ſimilium corporum. Ideo ſi lineæ CD, EF ſupponantur eſſe homologa latera ſimilium ſuperficierum IK, LM, & ſimilium corporum QR, ST, atque intelligantur diviſæ in infinitum, quarum infiniteſimale aliquod ſit A & B, erit (§. 2.) $\infty A : DC = \infty B : EF$, hoc eſt diviſim $A : DC = B : EF$, ſeu permutando $A : B = DC : EF$. Sint etiam ſuperficierum ſimilium IK, LM infiniteſimalia G, H, eadem qua ſupra ratione erit $G : H = IK : LM$. Sint tandem QR, & ST corpora ſimilia; O, P illorum infiniteſimalia erit pariter $O : P = QR : ST$. Hiſce itaque poſitis erit

$$A : B = DC : EF$$
$$G : H = IK : LM$$
$$O : P = QR : ST$$

Sed ut ſupra $$\overline{DC}^2 : \overline{EF}^2 = IK : LM$$
$$\overline{DC}^3 : \overline{EF}^3 = QR : ST$$

ergo

$$A^2 : B^2 = G : H$$
$$A^3 : B^3 = O : P$$

Hoc eſt ratio infiniteſimalium ſuperficierum ſimilium ad infiniteſimalia laterum homologorum eſt duplicata, & ratio infiniteſimalium corporum ſimilium ad infiniteſimalia laterum pariter homologorum eſt triplicata.

Digitized by Google

Digitized by Google

quas capiebat ſphærica ſuperficies FCG, replere debent majorem DBE ; ideo patet, & quoquoverſum æque expandi, quia eadem ubique eſt ratio, & denſitatem minuere. Sed quia ſuperficies circulares FCG, DBE in hoc caſu ſunt [§. 9.] virium expanſarum volumina, ac vires ipſæ ſunt maſſæ (§. 8.), quæ maſſa, ſcilicet vis centralis, ſibi ipſi ſemper æqualis manere debet, quia ut augeatur, vel minuatur ratio non extat, & abſque ratione ſufficiente (§.15.) nihil efficitur. Ideo denſitates vis centralis, ſeu illius in eodem ſpatio actiones erunt reciproce, ut volumina [§.14.] ſeu ſuperficies ſphæricæ FCG, DBE. Sunt vero ſuperficies (ex geometr.) in ratione duplicata radiorum, ideo Vires ſuperficiales in B, & C, erunt ut $\overline{CA}^2$, ad $\overline{AB}^2$; ſed vires Corporeæ (§. 5.) (ut revera (§.7.) ſunt) ut $\overline{CA}^3$ ad $\overline{AB}^3$. Q. E. D.

Corollarium 1. (§. 18.)

Ex demonſtrationibus hiſce diverſis apparet concipi poſſe attractionem & verſus Corpus attractum ut in priore, & quoquoverſum expanſam ut in poſteriore argumento, & tamen idem evenit; conſtat tamen eſſe magis naturalem conceptionem ſecundam, ac demonſtrationem, quia naturæ rei (§. 16.) conſentanea. Ideo ſi in problematis reſolvendis ſeu reſolutis ſecundum demonſtrationem primam, concordari non poſſet & demonſtratio ſecunda, ſignum eſſet auctores ſe eſſe ſubplantatos.

Scholion 1. [§. 19.]

E ſecunda demonſtratione, atque ex (§. 5. & 7.) patet fons erroris, quem commiſit Cel. Wolfius in propagatione luminis [*a*] concipienda ut expantio ipſa vis Centralis. Quippe ubi pervenit ad demonſtrandum intenſitates luminis ſuperficiales DBE, FCG eſſe reciproce ut radii $\overline{BA}^2$, & $\overline{CA}^2$, intulit ſic eſſe intenſitatem Luminis; ſed non *Fig.* 4.

[a] *Optices* (§.87. 89.)

Digitized by Google

non animadvertit particulas infiniteſimas in B, & C non eſſe Corporis, ſed ſolum [§. 7.] ſuperficiei; intenſitatem vero luminis, quæ spatium AB replet eſſe corpoream, & ideo adhuc illius infiniteſimam non eſſe ut $\frac{1}{\overline{AB}^2}$, ſed ut $\frac{1}{\overline{AB}^3}$. Nam concipiendo ſuperficies quotlibet innumeras infra DBE numquam replebunt ſpatium illud, ſed oportet prius per infinitum (§. 1.), imo per infinities infinitum (§. 2.) pervenire e cauſa ad effectum, ſeu ad infiniteſima corporis. Et infinitum quod extat a Cauſa, ſeu a ſuperficie ad initium Corporis (§. 3.) eſt diverſum ab infinitis particularum minimarum; & ideo rationes inter particulas minimas, ſicuti in integra inter quæ hujuſmodi infinitum intercedit duplicantur, etſi duo infinita intercedunt triplicantur [§. 5.]; unde decipimur (§. 4.) quando eadem ſumma colligimus, ſeu eadem ratione comparamus infiniteſima, ſeu integra generis (infinito præfato intercedente), diverſi, ut Wolfius fecit.

Scholion 2. [§. 20.]

Sed cur mirari Cel. Wolfium, alioquim virum inſignem ſe decepiſſe, quia proh dolor! ut intellectus limitati alii etiam inſignores ſe deceperunt; Quippe eadem ratione, qua ex demonſtratione ſecunda (§. 17.) colligimus Wolfium hallucinatum, colligitur ex demonſtratione prima ſe decepiſſe ſæculi noſtri, & præteriti Decus inſigne Clar. Iſaacus Nevvtonus; quia ubi (*a*) probat corpuſcula attrahi ad Centrum Sphæræ vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem Centro, & ipſe pariter in ſubdita demonſtratione accipit infiniteſima ſuperficiei pro infiniteſimis corporum; & quinam errores emanent in illo egregio opere ex hoc falſo argumento, videant qui volunt. Verum enim fateor, niſi tenerer teſtimonium perhibere veritati (*b*), inventum potius celarem, quam impertiendo

(a) *Phil. nat. princ. math. lib.* 1. *ſect.* 12. *prop.* 71. *pag.* 174. (b) *Evang. ſec. Joann. cap.* 18. *n.* 37.

Digitized by Google

do illud erudito Orbi vileſcere appareret opus præ cæteris, paribus reliquis, egregium. Sed quanti prius valebat, tanti & nunc valet, ſolum corrigere oportet quod corrigendum eſt, & fortaſſe faciam, ſi ocium huic oneri adæquatum habeam unquam. Cæterum principia in ſequentibus corrigo, per quantum permittunt Opuſculi limites, quæ planam viam reddunt ad cætera. Sed ut melius error indicatus appareat, jam in antecedente propoſitione proponit: quod ſi ad sphæricæ ſuperficiei puncta ſingula tendant æquales vires Centripetæ in reciproca ratione diſtantiarum; corpuſculum intra ſuperficiem sphæricam conſtitutum nullam in partem attrahitur. Notandum tamen eſt quod in Scholio, quod ſubſequitur propoſitionem LXXIII. explicat, ac definit ſuperficies illas sphæricas eſſe orbes adeo tenues ut illorum craſſitudo inſtar nihili ſit, ſeu orbes evaneſcentes, ex quibus sphæra ultimo conſtat, ubi orbium numerus augetur, ac craſſitudo diminuitur in infinitum; & ita puncta intelligit particulas illorum orbium æquales, magnitudinis contennendæ. Hoc eſt puncta intelligit (§. 7.) corpuſcula phyſica, & ſuperficies intelligit (§. 5.) factum ex ſuperficie extenſa in lineam infiniteſimam, quod factum ſunt etiam corpuſcula phyſica in latitudinem extenſa, haud in altum, ſeu in profundum. Hiſce intellectis, propoſitionem ita probat. Sit QAN ſuperficies sphærica illiuſmodi, & O corpuſculum intus conſtitutum, agantur per O lineæ AV, au arcus quam minimos intercipientes, & ob triangula VuO, AaO ſimilia, arcus erunt diſtantiis VO, & OA proportionales; & ſuperficiei sphæricæ particulæ quævis ad Vu, Aa terminatæ rectis A V, au per O tranſeuntibus undique erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires particularum in O exercitæ ſunt æquales, quia ſunt ut particulæ, directe, & quadrata diſtantiarum inverſe, & hæ duæ rationes componunt rationem æqualitatis. Verum itaque, ni ſublateret error. Sunt quippe particulæ in demonſtratione non phyſicæ, ſed ſuperficiales (§. 5. 7.), & in definiendo particulas aſſumpſit phyſicas, ideo ratio non foret æqualitatis particularum directe, & quadratorum diſtantiarum inverſe, quia particulæ phyſicæ ſunt ut cubi diſtantiarum (§. 5.) ideo ad æqualitatem reddendam aſſumere debebat vires non in duplicata, ſed in triplicata diſtantiarum ratione reciproce, ut *Fig.* 8.

§. 17.

Digitized by Google

(§. 17.) invenimus, & recte argumentare, & tunc propoſitionem veram obtinebat. Simili modo in propoſitionem ſequentem confundit particulas, ſuperficiales Xu. Vu cum phyſicis (§. 5. 7.) quamobrem erroneam argumentationem, ac propoſitionem reddit; aliaſque etiam plurimas.

Definitio 4. [§. 21.]

Fig. 5. 1. Si Curvæ BCF filum circumplicetur, & ſucceſſive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus B in rectam MC extenſi Curvam aliam deſcribit, quæ vocatur Curva ex evolutione deſcripta; prior vero dicitur evoluta; ſcilicet BCF evoluta, BMm ex evolutione deſcripta.

2. Portio fili MC appellatur radius oſculi; unde circulus continuo radio MC deſcriptus curvam ex evolutione deſcriptam oſculatur.

Corollarium 1. [§. 22.]

Evoluta igitur eſt locus omnium centrorum Circulorum Curvam ex evolutione deſcriptam Oſculantium.

Corollarium 2. (§. 23.)

Quia infiniteſimale, ſeu Elementum arcus Mm in curva ex evolutione deſcripta eſt Arcus circuli radio CM deſcripti (§. 21. n. 2.), radius Oſculi eſt ad curvam illam ſemper perpendicularis.

Theorema 2. [§. 24.]

Si corpus attrahens immobile maneat, corpus attractum, ſeu mobile ut Circulum continuo deſcribat neceſſe eſt, nec in alia curva moveri poteſt; etſi attractum deſcribit curvam aliam extra Circulum, continuo corpus attrahens locum mutat, & aut curvam centro ſuo deſcribit evolutam, & attractum Curvam ex evolutione deſcriptam, aut attractum Curvam hanc deſcribere pergit, & attrahens viam aliam facit æquivalentem. Verum tamen eſt quod attrahens in hiſce caſibus continuo locum mutare debet.

De-

Digitized by Google

Demonſtratio

1. Maneat attrahens primo immobile, attractum circulum perget deſcribere, quia undique [§. 18.] vires centripetæ expanduntur, & eædem (§. 17.) in æquali ab attrahente diſtantia ideo ratio non extat cur attractum nunc propius, nunc longius elongari debeat. Et cum nihil ſit ſine ratioue ſufficiente [§. 15.] ideo circulum continuo perget deſcribere, nec in Curvam aliam moveri poteſt.
2. Quodſi attractum deſcribit Curvam aliam extra Circulum, continuo Corpus attrahens locum mutare debet; quia licet [per Caſ. prim.] Corpus in circulo pergeret, in relatione tamen ad terminum fixum & ſtabilem Curvam aliam, imo innumeras, pro ratione viæ Corporis attrahentis, corpus attractum deſcribere poteſt. Eg. ſi Corpus attrahens deſcribit evolutam, attractum pergendo ſemper in Circulum deſcribere poteſt curvam ex evolutione deſcriptam (§. 21, 22, 23,) dummodo Circulus Corporis attracti continuo elatior fiat pro ratione radii oſculi, ita ut radius oſculi continuo diſtantia ab attracto ad attrahens ſit. Poteſt tamen & Curvam illam deſcribi, & Corpus attrahens viam aliam facere, ut infra in ellipſi exemplum ſpeciale dabimus.
3. Utcumque tamen ſit conſtat in hiſce caſibus corpus attrahens locum continuo mutare debere. Q. E. D.

Theorema 3. (§. 25.)

Areas, quas Corpora in gyros acta radiis ad immobile Centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.

Demonſtratio

Dividatur Tempus in partes æquales, & prima parte corpus deſcribat vi inſita rectam AB; idem Corpus parte temporis ſecunda ſi nihil impediret recte pergeret ad c (§. 15.) deſcribens Bc $\doteq$ AB; adeo ut radiis ad centrum actis confectæ forent areæ æquales ſcilicet ABS = BSc, quia triangulorum altitudo, ac baſis eadem. Verum ubi Corpus ve- *Fig. 6.*

 nit

Digitized by Google

nit ad B agat vis centripeta ex S impulſu unico ſed magno, efficiatque ut corpus de Bc declinet, & pergat in recta BC. Ipſi BS parallela agatur Cc, & completa ſecunda temporis parte per leges motus compoſiti (ut ex Mech.) reperietur in C in plano eodem [§. 15.] cum Triangulo ASB. Junge SC, & triangulum SBC, ob parallelas SB, Cc, æquale erit triangulo SBc, atque & triangulo SAB. Simili argumento ſi vis centripeta ſucceſſive agat in C, D, E, &c. faciens ut Corpus ſingulis temporis particulis ſingulas deſcribat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes lineæ in eodem plano, & triangula omnia æqualia erunt. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ deſcribuntur in plano immoto; & componendo ſunt arearum ſummæ quævis SADS, SAFS inter ſe ut ſunt tempora deſcriptionum. Augeatur jam numerus, & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter ADF erit ideo linea curva; adeoque vis Centripeta, qua Corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur aget indeſinenter; areæ vero quævis deſcriptæ temporibus deſcriptionum ſemper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc caſu proportionales. Q. E. D.

Nota quod areæ deſcriptæ non ſunt ſuperficiales, ſed ſolidæ quia illas deſcribens eſt corpus, ſeu horum Cauſa ſolida eſt; Sed quia totius areæ ſolidæ eadem eſt altitudo, ſcilicet diameter Corporis deſcribentis, ideo & areæ partes quævis ſolidæ erunt æque altæ, unde (ex Geometr.) illorum proportio eſt ut baſes, hoc eſt ut areæ ſuperficiales; Quare iſtæ pro illis ad tempus menſurandum accipi poſſunt.

Corollarium 1. (§. 26.)

Velocitas Corporis in Centrum immobile attracti eſt in ſpatiis non reſiſtentibus [quod quidem ſemper intelligitur] reciproce ut perpendiculum a Centro illo in orbis tangentem rectilineam demiſſum. Eſt enim velocitas, ſeu Celeritas in locis illis A, B, C, D, E, ut ſunt baſes æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF, & hæ baſes [ex geometria] ſunt reciproce ut perpendicula in ipſas demiſſa.

Hic etiam obſerva, quod AB, BC, &c. ſunt ut Celeri-

leritates lineales; ſed Celeritates ſuperficiales eſſent ut AB, BC, &c. ductæ ſigillatim in altitudinem Corporis gyrantis; & Celeritates ſolidæ ut AB, BC &c. ductæ ſigillatim in ſuperficiem Corporis gyrantis, cujus diameter eſt illius memorata altitudo; hoc eſt ut ſolida, quorum AB, BC &c. ſunt longitudines, & baſis ſuperficies memorata; ſeu illius ſoliditas eſt via Corporis gyrantis. Sed quia ſolida hujuſmodi ſunt æque alta, utpote ex eadem via, ac cauſa genetrice agnata, ſtabunt inter ſe ut baſes, ſeu ſi Cylindri ſunt ut ſuperficies, cujus diameter eſt diameter Cylindri, quod eſt idem; ſed quia denuo ſuperficies iſtæ ſunt æque altæ, ut ex eadem cauſa genetrice pariter agnatæ, illorum proportio eſt ut baſes, ſeu ut lineæ AB, BC &c. Unde velocitas, ſeu Celeritas in quovis caſu eſt ut perpendiculum in orbis tangentem demiſſum reciprocè ut ſupra.

Corollarium 2. (§. 27.)

Ex hiſce Theorematis apparet, [licet (§. 17.) Corpus attrahens continuo emanet a ſe vires centripetas in ratione triplicata diſtantiarum inverſa, nihilominus poſito quod in curva, extra circulum, corpus attractum moveatur, & Corpus attrahens omnino quieſcat, quod fieri intelligitur utroque Corpore prius (§. 24.) mobile; ac Corpus attrahens tandem quieſcat, in aliquo viæ prius deſcriptæ puncto, ſeu extra, & corpus attractum teneatur interea pergere ſemper in eadem curva], quod corpus attractum aliis legibus ſancitum, dum cogitur (§. 25.) pergere circa Corpus attrahens ita ut deſcribat areas temporibus proportionales, non poteſt ſequi effectum, quod ſequeretur ſi liberè circumvolvi potuiſſet; quia tribus ſubiacet legibus, ſcilicet ut percurrat nunc ocyus, nunc ſegnius pro ratione velocitatis (§. 26.) in diverſis diſtantiis a Corpore attrahente, ac deſcribat areas ut (§. 25.) diximus, & tramiti priori ſeu curvo ſit alligatum. Ideo non amplius ob hanc legem alligationis corpus attractum ſequitur effectum, quod ſequeretur ob vim centripetam Corporis attrahentis receptam, niſi alligatum eſſet; quamobrem vides in curvis diverſis variari effectum hunc pro ratione alligationis, qui effectus ſemper proportionalis eſt vi Centripetæ, in ſingulis locis curvæ, Corporis attrahentis, dempta tamen in

iiſdem locis ſingulis lege, ſeu vi prædicta alligationis, quæ quidem vocari poteſt vis centripeta reſpectiva. Unde vides in omni curva, extra circulum, vim centripetam e curvæ quovis puncto ad centrum virium fixum ſemper reſpectivam eſſe, ac in curvis variis diverſam prodere pro ratione diverſa alligationis Corporis attracti; quia niſi eſſet alligatum, & corpus attrahens quieſceret, pergeret ſtatim (§. 24.) in circulo. Vis Centripeta tamen aſſoluta, hoc eſt quæ e corpore attrahente emanat, ſemper remanet ut (§. 17.) invenimus.

Corollarium 3. (§. 28.)

Fig. 7. Cæterum in ſuperiori propoſitione vires centripetæ intelliguntur retrahere Corpus, ſeu mobile per rectam AG progreſſurum a motu rectilineo ut in curva incedat. Unde vis centripeta prodit ut linea $\frac{1}{DE^3}$, ſive ut $\frac{1}{EG^3}$ (§. 17.), quæ $\frac{1}{EG^3}$ magis convenit cum demonſtratione ſecunda ejusdem paragraphi, ſi arculus tamen AE intelligatur infinitè parvus. Sit enim C centrum virium, KHL, AEB circuli concentrici, erunt vires centripetæ in H, & A, ut $\frac{1}{CH^3}$ ad $\frac{1}{CA^3}$ (§. 17.) Sed lineæ CA, ED ſunt parallelæ, & perpendiculares ad AG, & pariter CH, KI perpendiculares ad H X, & parallelæ; ideo erit CE, ſive CA : CM = EG : ED, & CH: CO = KX: KI; ſed eſt & CA : CM = CH : CO. Ideo lineæ CM, CA, ED, EG, ſi arculus AE infinite parvus, ſunt ſemper in eadem ratione; ſed vires centripetæ (§. 17.) erant ut $\frac{1}{CA^3}$, ideo ſunt etiam ut $\frac{1}{EG^3}$, ſive $\frac{1}{ED^3}$ in circulo majore, & ut $\frac{1}{KX^3}$, ſeu $\frac{1}{KI^3}$ in minore. Nec vavalet tam Newtonum (*a*), quam Wolfium (*b*) aſſerere vires centripetas eſſe ut EG, quia impulſus accipiunt linealium

(a) *Ibidem lib.* 1, *ſect.* 2. *Cor.* 3. *prop.* 1. *pag.* 34.
(b) *Mech.* §. 620.

Digitized by Google

lium virium, non corporeorum ut extant (§. 17.), & ideo uterque (§. 7.) ſe decipit. Accipiunt easdem vires etiam in ratione particularum directa, ut etiam idem Wolfius (*a*) in circulis inæqualibus; ſed errant quia in hoc caſu vires centripetæ creſcerent in diſtantiis majoribus, contra demonſtrata ſpeciatim in argumento ſecundo (§. 17.).

Sed ut clarius hoc percipiatur, nec videatur in conatu corporeo impulſus creſcere contra Corollarium præſens, ita ut Corpus attractum tandem ad centrum virium perveniat, mente tenendum eſt (§. 16.) vires centripetas centrifugis æquales eſſe, nam aliter æquilibrium, ſeu diſtantia CA manere eadem non poſſet, contra propoſitum. Sed ut æqualitas iſta melius intelligatur, obſerva Corpus A dum pergere tenetur per tangentem AG, utpote ex impulſu per eandem viam a quavis cauſa impreſſo, retrahi continuo a curſu rectilineo per ſpatium EG, ſive ED, quæ ſunt [per demonſtr.] idem: Et hæc eſt vis Centripeta; vis autem centrifuga eſt conatus recedendi a curſu curvilineo & progredi in rectam tangentem AG, per ſpatium idem EG, ſive ED. Quare vides etiam ex demonſtratione vim centripetam centrifugæ æqualem eſſe. Pone nunc in A vim centralem, quæ eſt (ex demonſtr.) ut $\frac{1}{CA^3}$, vel $\frac{1}{ED^3}$, ſeu $\frac{1}{EG^3}$, $= a$; ibidem vis centralis ſuperficialis erit (§. 17.) $= \sqrt[3]{a^2}$, & vis centralis linealis $= \sqrt[3]{a}$; & [§. eodem] diſtantia, ſeu ſpatium in hiſce tribus caſibus ſemper ut $\sqrt[3]{a}$; ideoque continuo DE, EG, AC ſimiles. Sed quia vis centralis; ſeu a in omnibus peripheriæ punctis, quæ æque e centro diſtant, [§. 15.] eadem, ideo & $\sqrt[3]{a}$ pariter eadem in quavis peripheriæ parte; & cum ſit (ex probatis) ut CE, ſive CA, EG, EC, & iſtæ in omni caſu tam vis linealis, quam ſuperficialis, quam ſolidæ continuo eædem Q. E. D.

Theo-

(a) *Ibidem* §. 623.

Theorema 4. (§. 29.)

Tempora periodica ſunt in ratione compoſita ex ratione radiorum directè, ac ratione Celeritatum inversè.

Demonſtratio

1. Quia motus æquabilis in diſtantiis iisdem eſſe debet [§ 15.], ideo ſpatia a mobili deſcripta erunt ut tempora. (§. 25.).
2. Ideo ſi mobilia eadem Celeritate, ac motu æquabili feruntur ſunt ſemper ſpatia ut tempora [per Caſ. prim.]
3. At ſi mobilia feruntur eodem tempore, ac motu æquabili, ſpatia erunt ut Celeritates, (per Caſ. 1. & 2.)
4. Sed ſpatia erunt in ratione compoſita temporum, ac celeritatum: nam deſcribat mobile A celeritate c ſpatium s tempore t, & mobile B celeritate C spatium S tempore T, Ponamus idem mobile B Celeritate c deſcribere ſpatium q tempore T. Quoniam celeritas c mobilium A, & B eadem; erit q : s = T : t, [per Caſum ſec.]; & quia spatia S : q eodem tempore T deſcribuntur, erit S : q = C : c [per Caſ. tert]; ergo S q : sq = CT : ct, conſequenter S : s = TC : tc.
5. Etſi Corpora motu æquabili lata C, c deſcribunt ſpatia S, s, tempora T, & t quibus deſcribuntur erunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum, & reciproca Celeritatum; nam (per Caſ. 4.) S ; s = CT ; ct, ideo Sct = s CT, quare T : t = Sc : sC. Sed periodi ſunt ſpatia a mobili percurſa iisdem legibus quibus demonſtrando uſi ſumus, & peripheriæ circulorum radiis proportionales ſunt. Ideo patet Q. E. D.

Theorema 5. (§. 30.)

Fig. 7. Corporis in peripheria circuli incedentis vis centralis eſt ut arcus infinite parui $\overline{AE}^6$ per diametrum $\overline{AB}^3$ diviſum rereciproce, ſeu ut $\frac{\overline{BA}^3}{\overline{AE}^6}$

De-

Demonſtratio

Demittatur perpendicularis EM, erit in rectangulo ADEM, AM = DE; quoniam arcus infinite parvus AE a ſubtenſa non differt, erit (ex geom.) BA: AE = AE: AM; eſt ergo AM = DE = $\overline{AE}^2$: BA. Quare cum vis centralis ſit (§.28.) ut $\frac{1}{DE^3}$, erit eadem ut $\overline{BA}^3 : \overline{AE}^6$. Q. E. D.

Scholion 1. [§. 31.]

Hinc denuo ob rationes ſæpe dictas prodeunt errores geminati Wolfii (*a*) & Newtoni (*b*), quia uterque vim centralem definit ut arcus infinite parui AE quadr. per diametrum AB, ſeu radium AC [quod idem eſt] diviſum. Puta ut $\overline{AE}^2$: BA, ſive ut $\overline{AE}^2$: CA. quod eſt idem.

Corollarium 1. (§.32.)

Igitur cum arcus illi ſint ut velocitates corporum [§.26.], vires centripetæ ſunt ut radiorum, ſeu diametrorum circulorum cubi applicati ad cubo – cubos velocitatum; ſeu, ſi vis centripeta dicatur V, & celeritas C, erit V ut $\overline{BA}^3 : C^b$.

Corollarium 2. (§. 33.)

Unde ſi T = t, cum ſit (§.29.) T: t = Sc : sC, ſeu (ſi radii dicantur R) = Rc: rC, hoc eſt C: c = R : r, cum ſit (§. 32.) V ut $R^3 : C^6$, erit V : u = R^3 c^6 : C^6 r^3 hoc eſt (quia C ut R, c ut r) V : u = R^3 r^6 : R^6 r^3 = $r^3 : R^3$. Scilicet ſi Tempora periodica æquentur, & propterea velocitates ſint ut radii, erunt etiam vires centripetæ reciprocè in radiorum ratione triplicata.

Co-

[a] *Ibidem* (§.625.) (b) *Ibidem prop. quarta pag.*38.

Digitized by Google

Corollarium 3. (§. 34.)

Etſi $T : t = C : c = \sqrt{r} : \sqrt{R}$, erit $V : u = R^3 c^b : C^b r^3$ (§. 33.) $= R^3 r^3 : R^3 r^3$, ſed $R^3 r^3 = R^3 r^3$, ideo $V = u$. Hoc eſt ſi tempora periodica, & celeritates ſint reciproce in ratione ſubduplicata radiorum, æquales erunt vires Centripetæ inter ſe.

Corollarium 4. [§. 35.]

Si $T : t = R : r$, cum ſit (§. 33.) $T : t = cR : Cr$, erit propterea $C = c$, ſed (§. eodem) eſt et $V : u = R^3 c^6 : r^3 C^b$, ideo $V : u = R^3 : r^3$. Hoc eſt ſi tempora periodica ſint ut radii, & ideo Velocitates æquales, vires centriptæ erunt in radiorum ratione triplicata.

Corollarium 5. (§. 36.)

Si $T : t = \sqrt{R^3} : \sqrt{r^3}$, cum ſit denuo [§. 33.] $T : t = cR : Cr$, & ideo ſit $C : c = \sqrt{r} : \sqrt{R}$; atque (§. eodem) ſit $V : u = R^3 c^6 : r^3 C^6$, erit etiam $V : u = R^3 R^3 : r^3 r^3 = R^6 : r^6$. Hoc eſt ſi tempora periodica ſint in ratione ſeſquiplicata radiorum, & propterea velocitates reciproce in ratione radiorum ſubduplicata ; vires centripetæ erunt in ratione ſextuplicata radiorum.

Scholion 2. [§. 37.]

Corollaria iſta exponuntur & a Nevvtono [*a*] ſed quid intercedat a mea & ſua expoſitione, videant qui volunt. Solum notare placet quod in Corollario quinto ſuo ſexto, poſitis iisdem, intulit vires centripetas eſſe in duplicata ratione radiorum reciproce, & contra ; cum in noſtro appareant, ſintque in ſextuplicata directe. Et cum Keplerus,

[a] *Ibidem prop. 4. & Coroll. ſeq. pag.* 28.

Digitized by Google

rus, & poſtea alii collegiſſent caſus Corollarii hujus obtinere in Corporibus cæleſtibus: hoc eſt quadrata temporum periodicorum eſſe ut cubi diſtantiarum, ideo Newtonus fuſius leges illas exponit. Nos ſolummodo eas infra ſubindicabimus, ut appareat in illa eſſentiali re quiſnam ſit illius error. Prius tamen tradere volo principia alia de vi centripeta a Newtono, & Wolfio expoſita ut agnoſcantur quænam ſint corrigenda. Cæterum caſus hoſce virium centripetarum abſque alio argumento impoſſibiles in vi centripeta abſoluta plane videmus, reſpective tamen, ſeu in vi centripeta reſpectiva admittimus; quia ſicut vis abſoluta unicum comprehendit caſum, relativa innumeros pro curvarum variatione (§. 27.) comprehendere poteſt.

Corollarium 6. [§. 38.]

Si duo Corpora diverſas peripherias deſcribant, & vires centrales fuerint æquales, erunt diametri circulorum AB, & HL in ratione duplicata celeritatum. Vires enim centrales in eodem inſtanti ſunt ut $\overline{BA}^3 : \overline{AE}^6$, & $\overline{HL}^3 : \overline{HK}^6$ (§. 30.), $\overline{BA}^3 : \overline{AE}^6 = \overline{HL}^3 : \overline{HK}^6$ [per hip.] conſequenter $\overline{AE}^6 : \overline{HK}^6 = \overline{BA}^3 : \overline{HL}^3$, ſeu $\overline{AE}^2 : \overline{HK}^2 = BA : HL$. *Fig. 7.*

Corollarium 7. (§. 39.)

Et ſi duo Corpora in peripheriis inæqualibus eadem vi centrali urgentur, tempus in majori eſt ad tempus in minori in ratione ſubduplicata diametri majoris AB ad minorem HL. Sit $AB = D$, $HL = d$, peripheria major P, minor p; erit $C^2 : c^2 = D : d$: (§. 38.), unde $C : c = \sqrt{D} : \sqrt{d}$, eſt vero (ex Geometr.) $P : p = D : d$, ergo & $\frac{P}{C} : \frac{p}{c} = \frac{D}{\sqrt{D}} : \frac{d}{\sqrt{d}} = \sqrt{D} : \sqrt{d}$. Sed $\frac{P}{C} : \frac{p}{c}$ ſunt ut $T : t$ (§. 29.), ergo $T : t = \sqrt{D} : \sqrt{d}$.

Digitized by Google

Corollarium 8. (§. 40.)

Eſt igitur $T^2 : t^2 = D : d$. Hoc eſt diametri circulorum, in quorum peripheriis mobilia eadem vi centrali urgentur, ſunt in ratione duplicata temporum.

Corollarium 9. [§. 41.]

Quoniam $C^2 : c^2 = D : d$. (§. 38.), & $T^2 : t^2 = D : d$ [§. 40.] erit quoque $T^2 : t^2 = C^2 : c^2$, ſeu $T : t = C : c$; Hoc eſt tempora quibus perpheriæ, aut arcus ſimiles percurruntur a mobilibus, eadem vi centrali impulſis, celeritatum rationem habent.

Corollarium 10. (§. 42.)

Quoniam $V : u = \frac{D^3}{C^6} : \frac{d^3}{c^6}$ (§. 33.), & [§. 25. in Demonſtratione n. 4.] $S : s = TC : tc$, eſtque $Stc = sTC$, ideoque $C : c = St : sT$, ſeu in caſu noſtro C ut $D : T$, c ut $d : t$, conſequenter $C^6 : c^6 = \frac{D^6}{T^6} . \frac{d^6}{t^6}$, adeoque $\frac{D^3}{C^6} : \frac{d^3}{c^6} = \frac{T^6 D^3}{D^6} : \frac{d^3 t^6}{d^6} = \frac{T^6}{D^3} : \frac{t^6}{d^3}$. Eſt igitur $V : u = \frac{T^6}{D^3} : \frac{t^6}{d^3}$ $T^6 d^3 : t^6 D^3$: Hoc eſt vires centrales ſunt in ratione compoſita ſextuplicatæ temporum directè, & triplicatæ diametrorum inversè.

Corollarium 11. (§. 43.)

Cum ſit (§. 33.) denuo $V : u = \frac{D^3}{C^6} : \frac{d^3}{c^6}$, ſi ponatur eſſe

C:

$C : c = d : D$, adeoque $C^6 : c^6 = d^6 : D^6$, erit $V : u = \frac{D^3}{d^6} : \frac{d^3}{D^6} = D^9 : d^9$. Hoc eſt vires centrales, ſi ponantur celeritates reciproce, ut diametri, erunt in ratione nonuplicata diametrorum, ſeu diſtantiarum a centro virium.

Theorema 6. (§. 44.)

Si corpus in ſpatio non reſiſtente circa centrum immobile in orbe quocumque revolvatur, & arcum quem vis jam jam naſcentem tempore quam minimo deſcribat, & ſagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam biſecet, & producta tranſeat per centrum virium; erit vis centripeta in medio arcus in ratione ſextuplicata temporis directe, & ſagittæ triplicata inverſe.

Demonſtratio

Eſt enim (§. 42.) V ut $\frac{T^6}{D^3}$, ſeu ut $\frac{T^6}{R^3}$, ſed [§. 28.] C A, ſeu R eſt ut MA, ſeu ſagitta, dupli arcus AE, quæ ſi vocetur S, erit V ut $\frac{T^6}{S^3}$. Q. E. D. *Fig. 7.*

Corollarium 3. [§. 45.]

Si Corpus P revolvendo circa centrum S deſcribat lineam curvam APQ, tangat vero recta PR curvam illam in puncto P, & ad tangentem ab alio quovis curvæ puncto Q agatur QR diſtantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad diſtantiam illam SP, vis centripeta perimetri curvæ ad centrum virium S erit ut ſolidum $\frac{\overline{SP}^6 . \overline{QT}^6}{\overline{QR}^3}$, ſi modo ſolidi illius ea ſemper ſumatur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P, & Q; nam QR = ſagittæ dupli arcus QP, in cujus medio eſt P, & duplum rectan- *Fig. 8.*

gulum SQP, ſive SP. QT tempori quo arcus iſte duplus deſcribitur proportionale eſt [§. 25.], ideo pro exponente temporis ſcribi poteſt.

Corollarium 2. (§. 46.)

Fig. 8. Eodem argumento vis centripeta perimetri curvæ eſt ut ſolidum $\frac{\overline{SY}^6 \cdot \overline{QP}^6}{\overline{QR}^3}$ ſi modo SY perpendiculum ſit e centro virium in orbis tangentem demiſſum, nam SY : QP = SP : QT.

Corollarium 3. (§ 47.)

Inde etiam ex hiſce huc uſque probatis extrahitur menſura alia virium centralium in curvis omnibus ut [§. 45, 46] fecimus. Nam tangat PN curvam in puncto M, ſitque O
Fig. 5. centrum virium, OM linea ducta ex O ad corpus mobile, quæ radius vector dicitur, & CM radius oſculi (§. 21.). Ducatur OP normalis ad tangentem, & linea ON alteri OM, & CR alteri CM infinite propinquæ; Arcus circuli Mm haberi poteſt (§. 21. 23.). Vis centripeta agens verſus centrum circuli erit ut $\frac{1}{m\overline{R}^3}$, quæ vero agit verſus centrum virium O erit ut $\frac{1}{N\overline{m}^3}$ (§. 28.). Quoniam radius oſculi ad tangentem perpendicularis (§. 23.), & CR eſt ipſi infinite propinqua, erit & CRN angulus rectus, unde angulus P = angulo R. Cum ſit etiam NO alteri MO infinite propinqua, erit angulus PMO = angulo PNO; unde triangula POM, & RNm ſimilia. Ergo $m\overline{R}^3 : m\overline{N}^3 = \overline{PO}^3 : \overline{MO}^3$. Hoc eſt vis agens ad centrum oſculi ad vim agentem ad centrum orbis eſt, ut $\frac{1}{\overline{PO}^3}$ ad $\frac{1}{\overline{MO}^3}$ (per demonſtr). Sed vis centralis agens ad centrum oſculi [§ 33.] eſt $= \overline{MC}^2 : \overline{C}^6$; & C eſt reciproce ut PO (§. 26.), adeoque

que vis agens in centrum oſculi $C = \overline{MC}^3 . PO^6$. Quare cum ſit (per demonſtr.) vis ad centrum oſculi ad vim centrum orbis petentem ut $\overline{MO}^3$ ad $\overline{PO}^3$; reperitur tandem vis centripeta agens ad centrum orbis $O = \frac{\overline{PO}^9 . \overline{MC}^3}{\overline{MO}^3}$

Hoc eſt in ratione compoſita ex nonuplicata perpendiculi ex centro virium in tangentem, & triplicata radii oſculi directè, atque ex triplicata radii vectoris inverſè.

Scholion 1. [§. 48.]

Cæterum methodum iſtam invenit Abrahamus de Moivre, & exponit Wolfius (*a*), ſed quia ſequebantur Newtoni principia, inveniunt eam $= \frac{MO}{PO^2 . MC}$; Quamobrem corrigere eam oportuit, ac reducere ad veram normam virium centripetarum.

Corollarium 4. [§. 49.]

Hinc facile invenitur ratio vis centripetæ Corporis in circulo gyrantis ad punctum quodcunque. Eſto omnia ut [§. 45.] ſolum LPA ſit circulus, produc QR uſque ad L, TQ uſque ad Z, PS uſque ad V, & ex V ducatur diameter VA. Ob ſimilia triangula ZQR, ZTP, & VPA; erit $\overline{RP}^6$, hoc eſt $\overline{QR}^3 . \overline{RL}^3$ ad $\overline{QT}^6$, ut $\overline{AV}^6$ ad $\overline{PV}^6$; ideoque $\frac{\overline{QR}^3 . \overline{RL}^3 . \overline{PV}^6}{\overline{AV}^6} = \overline{QT}^6$; multiplica per $\frac{\overline{SP}^6}{\overline{QR}^3}$, & punctis P & Q coeuntibus ſcribatur PV pro RL; ſic fiet $\frac{\overline{SP}^6 . \overline{PV}^9}{\overline{AV}^6} = \frac{\overline{SP}^6 . \overline{QT}^6}{\overline{QR}^3}$; ergo vis centripeta reſpectiva Fig. 8.

§. 45.

(a) *Mech.* (§. 657.)

(§. 45.) ut $\frac{\overline{SP}^6 . \overline{PV}^9}{\overline{AV}^6}$, ſeu, ob datam AV, ut $\overline{SP}^6 . \overline{PV}^9$.

Corollarium 5. [§. 50.]

Hinc ſi punctum datum S, ad quod vis centripeta reſpectiva tendit, locetur in circumferentia circuli, puta ad V, erit vis ut $\overline{SP}^{15}$,

Corollarium 6. (§. 51.)

Fig. 8. Vis reſpectiva corporis P in circulo ad S eſt ad vim reſpectivam qua Corpus idem P in eodem circulo, & eodem tempore periodico circum aliud quodvis centrum virium M revolvi poteſt ut $\overline{SP}^6 . \overline{PV}^9$ ad $\overline{MP}^6 . \overline{PN}^9$ (§. 49.), ſeu ducendo utrumque membrum in $\frac{\overline{SP}^3}{\overline{PN}^9}$ ut $\frac{\overline{SP}^9 . \overline{PU}^9}{\overline{PN}^9}$ ad $\overline{MP}^6 . \overline{SP}^3$; ſive, ducta SY parallela lineæ MP ex S ad tangentem, ut SY^9 ad $\overline{MP}^6 . SP^3$.

Corollarium 7. [§. 52.]

Vis reſpectiva, qua Corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, eſt ad vim reſpectivam, qua corpus idem P in eodem orbe, eodemque tempore periodico circum aliud quod vis virium centrum M revolvi poteſt, [hoc eſt ſi corpus attrahens e loco S transponatur in M] in ratione nonuplicata rectæ quæ ducitur ad tangentem orbis per mobile tranſeuntem a primo virium centro S, atque radii vectoris ſecundi virium centri eſt parallela, ad rationem compoſitam ex primo radio vectore triplicato, & ex ſecundo ſextuplicato. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eædem ſunt ac in circulo ejusdem curvaturæ (§. 21. 22. 23.)

Scho-

Digitized by Google

Scholion 1. [§. 53.]

Cæterum invenimus duas normas virium centripetarum reſpectivarum alteram [§. 45, 46.], alteram [§. 47.] apparenter diverſas, ſed eſt ſolum diverſitatis ratio, quia prima fundamentum habet in (§. 17. 25.), altera vero in (§. 17, 21, 22, 23); Cæterum in praxi alteram pro altera formula uſurpare poſſumus, ut infra ex particularibus exemplis patebit. Formula autem [§. 51, 52.] eſt menſura rationum virium reſpectivarum in curva eadem inter ſe; & ejus uſus pariter patebit infra. Cæterum licet vires reſpectivæ etiam in curva eadem pro ratione (§. 52) loci corporis attrahentis variæ ſint, vis tamen abſoluta (§. 27.) eadem continuo emanat.

Problema 1. (§. 54.)

Gyretur mobile corpus in circulo requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad ejus centrum.

Solutio, & *Demonſtratio*

1. Eſt enim vis centralis in perimetro curvarum omnium *Fig.* 8. (§. 46.) ut $\frac{\overline{SY}^6 . \overline{QP}^6}{\overline{QR}^3}$, & in circulo eſt (ex Geometr.) $\overline{RP}^2 = RL . RQ$, & punctis acceptis P, & Q coeuntibus, PV pro RL, & QP pro RP, erit $\overline{QP}^2 = RQ . VP$, ſeu $\overline{VP}^3 = \frac{\overline{QP}^6}{\overline{RQ}^3}$, unde vis in circulo $= SY^6 . VP^3$; ſed (ex hipoteſi) S eſt centrum circuli ideo SP = SV, unde $\overline{VP}^3 = \frac{\overline{2SV}^6}{\overline{SP}^3}$; ſed SY cum ſit in circulo radio æqualis, erit vis centralis $= \frac{SV^6 . \overline{2SV}^6}{\overline{SP}^3}$; at cum ſit $\overline{SV}^6 . \overline{2SV}^6$ conſtans erit tandem vis centralis ut $\frac{1}{\overline{SP}^3}$, Q. E. I, & D.

Ali-

Digitized by Google

Aliter

Fig. 5. 2. Eſt etiam vis centralis in perimetro curvarum (§. 47.) ut $\frac{\overline{PO}^9 . \overline{MC}^3}{\overline{MO}^3}$ ſed ſi curva BMm ſit circulus, & O illius centrum, erit radius oſculi radio circuli æqualis, & PO etiam æqualis radio circuli, unde $\overline{PO}^9 . \overline{MC}^3$ conſtans, ideo vis centralis ut $\frac{1}{\overline{MO}^3}$ Q. E. I, & D.

3. En ergo quod congruit noſtra ſolutio, ac demonſtratio cum inventione [§. 17.], & demonſtratione [§. 24.]; unde in circulo vis centralis reſpectiva, ac abſoluta æquales.

Problema 2. [§. 55.]

Gyretur corpus in ſpirali æquiangula requiritur lex vis centripetæ in perimetro ejus tendentis ad centrum ſpiralis.

Solutio, & Demonſtratio.

Sit QPA Spiralis prædicta, & angulus PSQ ut prius (§. 45.) infinite parvus. Et ob datos omnes angulos, dabitur ſpecie figura SPQTR. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, eſtque $\frac{\overline{QT}^6}{\overline{QR}^3}$ ut $\overline{QT}^3$, ſeu ut $\overline{SP}^3$. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR (§. 28.) angulum contactus QPR ſubtendens, mutabitur in duplicata ratione ipſius PR, vel. QT. Ergo manebunt omnia ut ante. Quare $\frac{\overline{QT}^6 . \overline{SP}^6}{\overline{QR}^3}$ ut $\overline{SP}^6 . \overline{SP}^3 = \overline{SP}^9$ Q. E. I, & D.

Fig. 8.

En adeo caſus (§. 43.) ubi, poſitis poſtulatis, vires centrales erant in ratione nonuplicata radii vectoris.

Lem-

Digitized by Google

Lemma 3. [§. 56.]

Determinare utrum quantitas quæ prodit ex XQ. HM normalibus ad tangentem ellipſis, altera excitata ex contactu tangentis, altera ex centro ellipſis ſit variabilis, ſive conſtans. *Fig. 9.*

Solutio, & Demonſtratio

Sit BMA ellipſis, QV tangens, M punctum contactus, ſit AS abſciſſa, SM ſemiordinata: eſt (§. 440. Wolf. Analyſ. finit.) $VS = \overline{ay}^2 : (\frac{1}{2} a b - bx)$ & $SH = \frac{1}{2} ab - bx : a$, & HM hinc $= \sqrt{ (y^2 + \frac{1}{4} b^2 - b^2 x:a + b^2 x^2 : a^2)}$, VA [§cit.]eſt $= \frac{1}{2} ax : (\frac{1}{2} a - x)$. Eſt $AX = \frac{1}{2} a$, $AS = x$, $SM = y$; Unde $VX = VA + AX = \frac{1}{4} a^2 : (\frac{1}{2} a - x)$; & $VH = VS + SH = [ay^2 + \frac{1}{4} a^2 b^2 - ab^2 x + b^2 x^2] : (\frac{1}{2} a^2 b - abx)$. Sunt lineæ HM, & XQ (& hip.) parallelæ unde $VH : HM = VX : XQ = \frac{VX . HM}{HV}$. Sit brevitatis gratia $VH = m : n$, $HM = \sqrt{c}$, $VX = r : u$, unde $XQ = \frac{nr\sqrt{c}}{mu}$. Sint etiam calculi facilitate axis AB = a, parameter = b, quantitates conſtantes, determinati; ſcilicet $a = 2$, & $b = 1.$; erit $n = 2 - 2x$, & $r = 1$, & c ſubſtituto pro y^2 ipſius valore $= bx - bx^2 : a$ [§. 421. Wolf. ut ſupra ($= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x^2$, & $m = 1 + 2x - x^2$ & $u = 1 - x$. Unde prodit $QX . HM = nrc : mu = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3) : [1 + x - 3x^2 + x^3) = \frac{1}{2}$. Hoc eſt quantitas conſtans. Q. E. I, & D.

Corollarium 1. (§. 57.)

1. Quando tangens cadit in &, hoc eſt axi majori parallela evadit, tunc HM = QX = &X; ſed & X [§. 423 Wolf. ut ſupra] eſt = $\sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ideo $X\overline{\&}^2$ = [§. 56.] M H. QX = $\frac{ab}{4}$; erat etiam MH. QX [§. eodem] = $\frac{2}{4}$ & a = 2, b = 1; unde 2. 1 : 4 = $\frac{2}{4}$ = $\frac{ab}{4}$. En adeo valor ipſius quantitatis etiam in ellipſi indeterminata = a. $\frac{1}{4}$ b, ſeu = b. $\frac{1}{4}$ a.

2. Quando tangens cadit in A. Hoc eſt axi minori parallela evadit, tunc XQ = XA = $\frac{1}{2}$ a, & inde agnoſcitur MH = $\frac{1}{2}$ b, quia illorum productum = $\frac{ab}{4}$ ut (n. 1.) invenimus. Eſt etiam [§. 325. Wolf. Analyſ. infinit.] radius oſculi in ellipſi ſemper = 4 $\overline{MH}^3 : b^2$; ideoque ibi = 4. $\frac{1}{8}$ $b^3 : b^2$ = $\frac{1}{2}$ $b^3 : b^2$ = $\frac{1}{2}$ b; Indeque radius oſculi & normalis ad tangentem coincidunt. Mirum ſane conſenſum, quia normalis MH relata ad axem majorem apparet nulla. En adeo mira variabilium, normalis, radiique oſculi proprietas, quam quidem an aliquis invenerit neſcio.

Corollarium 2. (§. 58.)

Cum ſit HM. QX = $\frac{ab}{4}$, erit $\overline{HM}^n . \overline{QX}^n = \frac{a^n b^n}{4^n}$.

Hoc eſt etiam illius quævis dignitas conſtans.

Scholion 1. [§. 58.]

Fig. 10. Hinc etiam obiter invenire licet curvam, quæ tranſit per omnia puncta Q, ſive M, ſi altera linearum MH, & X

Q

Q ſumatur pro abſciſſa altera pro ſemiordinata; eſt enim, abciſſa $= x$, ſemiordinata $= y$, in hac curva $xy = \frac{ab}{4}$ [§. 57.]; ſed in hyperbola (§. 487. Wolf. analyſ. finit.) ducta QM parallela lineæ aſymptoticæ CF, eſt ſemper $CQ \cdot QM = \overline{AI}^2$, quæ potentia hyperbolæ audit; & in hyperbola æquilatera (§. 500. ejusdem) eſt angulus aſymptotarum FCQ rectus, unde MQ normalis CQ, ideo illius ſemiordinata ad hyperbolam externam. Eſt $\overline{AI}^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$, ſi $CA = \frac{1}{2} a$, & $AE = \frac{1}{2} c$ (477. ejuſdem) & in æquilatera hyperbola hæ lineæ æquales ſunt [§. 505. ejuſdem]; unde $\frac{a^2 + c^2}{16} = \frac{2a^2}{16} = \frac{a^2}{8}$. Eſt ultra in hyperbola æquilatera parameter æqualis axibus [§. 506. ejuſdem], unde ſi dicatur b, eſt $\frac{aa}{8} = \frac{ab}{8}$, unde $xy = \frac{ab}{8}$; ſed in ellipſi erat $xy = \frac{ab}{4}$, unde $\frac{ab}{8}$ hyperbolæ $= \frac{ab}{4}$ ellipſis, ab hyperbolæ $= 2ab$ ellipſis; hinc cum jam ſit in hyperbola æquilatera $a = b$, ſi fiant axes & parameter $= \sqrt{2ab}$ (quantitas homogenea ellipſis) erit $\frac{a^2 + c^2}{16} = \frac{2ab + 2ab}{16} = \frac{ab}{4}$. En adeo ſervatis homogeneis hyperbola æquilatera externa exprimens lineas HM, XQ ellipſis. Quando autem tangens ellipſis cadit in &, tunc $HM = XQ$ (§. 57.) ſeu $x = y = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, ſed in hyperbola ſupra- *Fig. 9.* ſcripta $CI = AI = \frac{\sqrt{ab}}{2}$, ſeu $x = y$; unde ſemiaxis ellipſis *Fig. 10.* minor = lateri potentiæ hyperbolæ. Quando autem in ellipſi tangens cadit in A, tunc (§. 57.) $XQ = \frac{1}{2} a$, & $MH = \frac{1}{2} b$, unde in hyperbola prædicta, ſi $CS = \frac{1}{2} b$, & S

Digitized by Google

$M = \frac{1}{2} a$; & ſi $CQ = \frac{1}{2} a$, & $QM = \frac{1}{2} b$. Vides itaque cum nunquam XQ, & MH fiat $= o$, cum axe curvam nunquam concurrere poſſe; unde eſt quod etiam ex ipſa ellipſis proprietate hyperbolæ homogenea; CF, & CQ ſint aſymptotæ hyperbolæ. En adeo miram ſectionum conicarum proprietatem, terminis quidem ad homogeneitatem relatis.

Problema 3. (§. 59.)

Giretur Corpus in ellipſi; requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſeos.

Solutio, & Demonſtratio

Fig. 11. Sumto CA, CB ſemiaxes ellipſeos, GP, DK diametri coniugatæ, PF, Qt perpendicula ad diametros, & Qu ordinatim applicata, & completo parallelogrammo Qu PR (erit ex conicis ($Pu\overline{G}^3 : \overline{Qu}^6 = \overline{PC}^6 : \overline{CD}^6$, &) ob ſimilia triangula Qut, PCF) eſt $\overline{Qu}^6 : \overline{Qt}^6 = \overline{PC}^6 : \overline{PF}^6$: & coniunctim $\overline{Pu}^3 . u\overline{G}^3 : \overline{Qt}^6 = \overline{PC}^{12} : \overline{CD}^6 . \overline{PF}^6$; hoc eſt $u\overline{G}^3 : \frac{\overline{Qt}^6}{\overline{Pu}^3} = \overline{PC}^6 : \frac{\overline{CD}^6 . \overline{PF}^6}{\overline{PC}^6}$. Scribe $Q\overline{R}^3$ pro $\overline{Pu}^3$, & [cum ſint ex conicis parallelogramma omnia circa datæ ellipſis diametros conjugatas deſcripta æqualia] $\overline{BC}^6 . \overline{CA}^6$ pro $\overline{CD}^6 . \overline{PF}^6$, nec non punctis P, & Q coeuntibus $2\overline{PC}^3$ pro $u\overline{G}^3$, & ductis extremis, & mediis in ſe mutuo, fiet $\frac{\overline{Qt}^6 . \overline{PC}^6}{Q\overline{R}^3} = 8 . \frac{\overline{BC}^6 . \overline{CA}^6}{\overline{PC}^3}$. Eſt ergo (§. 45.) $=$ vi centrali in curvæ perimetro, id eſt, [ob datum. 8. $\overline{BC}^6 . CA^6$], vis eſt ut $\frac{1}{\overline{PC}^3}$. Q. E. I, & D.

Ali-

Digitized by Google

Aliter

Eſto omnia ut (§. 56.), erit (§. 47.) vis centralis in M $= \frac{XQ^9 . MC^3}{XM^3}$, poſito tamen MC = radio oſculi, qui (§. 23.) cum normali ad tangentem ſemper MH coincidit, ſed in ellipſi radius oſculi [§. 57.) $= 4MH^3 : b^2$; ideo $MC^3 = 64. MH^9 : b^6$; unde vis in M (dempto 64. b^6 conſtante) ut $\frac{XQ^9 . MH^9}{MX^3}$, ſed $XQ^9 . MH^9$ eſt (§. 58.) itidem quantitas conſtans, ideo vis centralis in M ut $\frac{1}{XM^3}$. Q. E. I, & D. *Fig. 9.*

Corollarium 1. [§. 60.]

Eſt igitur vis ut diſtantia corporis a centro ellipſeos triplicata reciproce; unde ſi vis hac ratione inveniatur movebitur corpus in ellipſi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo in quem ellipſis migrare poteſt.

Scholion 1. [§. 61.]

Alicui fortaſſe videbitur paradoxum eſſe hoc in caſu, quod ſit vis centripeta reſpectiva, ut abſoluta [§. 54.] in ratione triplicata radii vectoris reciprocè (§. 59.); ſed facile enodatur. Sit Circulus DCE, & ellipſis DME, utriuſque axis DE, & A centrum ellipſis, & circuli. Conſtat quidem (§. 128. analyſ. infinit. Wolf.) aream totam ellipſis eſſe, ad aream totam circuli ut AM, ad AN, & pariter quodvis ſegmentum AEO, & AEC; ideo ubi mobile [§. 25.] in circulo eſt in C, in ellipſi erit in O, unde B OC ſemiordinata eadem circuli & ellipſis, AB utriuſque abſciſſa eadem. Conſtat ultra (ex Conicis) ſecari proportionaliter ſemiordinatas circuli ab elliptica curvilinea, hoc eſt BO ſemper ut BC. Ideo circulus & ellipſis ge- *Fig. 12.*

Digitized by Google

nere comprehenduntur, quamobrem vires in horum perimetris cum ſimiles eſſe debeant, vides itidem cum radiis vectoribus debere eſſe in eadem ratione, & ideo debere eſſe vim reſpectivam in O ſemper ut abſoluta in C, quia alteratio [§. 27.] proportionalis eſt vi integræ, conſequenter ſic vis alterata, ſeu reſpectiva. Et tandem, ellipſi in circulum redacta, fit vis reſpectiva, non ſolum in variando ſimilis, ſed abſolutæ æqualis.

Scholion 2. (§. 62.)

Si Ellipſis, centro in infinitum abeunte, vertatur in Parabolam corpus movebitur in hac parabola, & vis ad centrum infinite diſtans jam tendens evadet æquabilis. Et ſi coni ſectio parabolica, inclinatione plani ad conum ſectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur Corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam verſa.

Problema 4. (§. 63.)

Gyretur Corpus in Ellipſi, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad focum ellipſeos.

Reſolutio, & Demonſtratio

Fig. 11. Cum vis ad centrum ellipſis tendens ſit (§. 59, 60.) in ratione triplicata reciproca radii vectoris, ſeu ut $\frac{1}{\overline{CP}^3}$. Sit S focum ellipſis, radius vector ſit SP, & CT ſit lineæ SP parallela, erit (§. 52.) vis perimetri orbis tendens ad C, ad vim eandem tendentem ad S ut $\overline{CT}^9$ ad $\overline{SP}^6 . \overline{CP}^5$; ſed vis tendens ad C eſt ut $\frac{1}{\overline{CP}^3}$, ideo $\overline{CT}^9 : \overline{SP}^6 . \overline{CP}^5 = \frac{1}{\overline{CP}^3} : \frac{\overline{SP}^6}{\overline{CT}^9}$. Sed CT = EP, & EP (ex Conicis) = ſemiaxi majori; ideo conſtans; unde prodit vis tendens ad focum ellipſeon ut $\overline{SP}^6$. Q. E. I, & D.

En

En adeo caſus (§. 36.) ubi vires centripetæ erant in ratione directa ſextuplicata radii vectoris.

Scholion 1. [§. 64.]

Eadem brevitate, qua traduximus (§. 59.) ad Hyperbolam, & Parabolam, licet & hic facere, ideo non amplius morabor.

Scholion 2. (§. 65.)

Quia jam plane creditur pluribus argumentis, ac phænomenis confirmatum, quod Corpora Cæleſtia moveantur in ellipſi, exiſtente in illius foco in primariis Planetis Sole, ſeu in omnibus exiſtente in altero ellipſis foco centro virium; ac [§. 24, & 27.] conſtat, niſi aliis legibus mobile alligatum eſſet, quam vi centripetæ, non poſſet quin pergeret in circulum habentem in centro centrum virium; atque lex [§. 24.] radii oſculatoris inducta, licet generalis, ſimplex tamen non ſit, ob variationem continuam radii oſculatoris; ideo damus methodum ſpecialem in ellipſi, quâ alligatio continuo eadem manet, & mobile interea a vi centrali juxta leges præfatas in ellipſim pergere cogitur, quia dignitas problematis facit ut congeram quæ ad legem iſtam explanandam, ac ſimpliciorem reddendam faciunt.

Theorema 7. (§. 66.)

Ducta linea AB, ac diviſa in quovis puncto M, concipiatur centrum A ſenſim incedere verſus D, & interim MB incedere verſus X, ſed ea lege ut angulus DNb duplus ſemper ſit angulo DAB; Dico quod curva deſcripta a punctis omnibus B eſt ellipſis. *Fig.* 13.

Demonſtratio

Punctum M ſingulis revolutionibus lineæ AB deſcribit circulum MNO, ideo centrum lineæ BM ſemper in eodem circulo. Perveniat ideo AB in AD, & MB ſit Nb; ducatur Db, ac perpendicularis NK ad DB. Cum ſit DNb triangulum iſoſcele, erit angulus DNK = angulo KNb =

angu-

Digitized by Google

angulo DAB (ex hipoteſi) ; quare linea KN parallela AB, & angulus in H rectus. Quamobrem producta AB uſque in P ut ſit $AB = AP$, & ſunto PB pro axe, BH pro abſciſſa, & Hb pro ſemiordinata hujus curvæ, determinetur iterum alia ſemiordinata (Bh, cui respondet abſciſſa Bh, & tunc BA eſt EA, BM eſt O(B, & ducta E(B, OV, ut ſupra, anguli in V, h recti. Producantur etiam DN uſque ad G, ut ſit $DN = NG$; & EO uſque ad I, ut ſit $EO = OI$, ac ducantur bG, (BI. Anguli DbG, E(BI, quia ſunt in ſemicirculo, recti ſunt, ideo lineæ (BI, bG, BP ſunt parallelæ. Quare ſit $AD = AE = a$; $AG = AI = b$, [nam hujuſmodi lineæ determinantur ex hipoteſi] $BH = x$, & $Bh = y$, erit $PH = 2a - x$, & $Ph = 2a - y$, & DH, ut circuli ſemiordinata $= \sqrt{(2ax - x^2)}$, & $Eh = \sqrt{(2ay - y^2)}$. His itaque conſtitutis eſt

AD : DH = AG : Hb AE : Eh = AI : h(B

$$a : \sqrt{[2ax - x^2]} = b : \frac{b\sqrt{[2ax - x^2]}}{a} \qquad a : \sqrt{[2ay - y^2]} = b : \frac{b\sqrt{2ay - y^2}}{a}$$

Ideo:

$$a : b = \sqrt{(2ax - x^2} : \frac{b\sqrt{(2ax - x^2)}}{a} = (2ay - y^2) : \frac{b\sqrt{(2ay - y^2)}}{a}$$

quare quadrando terminos, ac reſtituendo valores ad lineas æquivalentes, prodit

$$\overline{\frac{b\sqrt{(2ax - x^2}}{a}}^{\,2} : \overline{\frac{b\sqrt{(2ay - y^2}}{a}}^{\,2} = 2ax - x^2 : 2ay - y^2$$

$= [2a - x]\,x : (2a - y)\,y$; $\overline{Hb}^2 : \overline{h(B}^2 = PH \cdot HB : Ph \cdot hB$

Cum autem in ellipſi ſint ita quadrata ſemiordinatarum, ut rectangula ex abſciſſis (ut conſtat ex conicis) linea curva propoſita ellipſis eſt. Q. E. D.

Sit

Digitized by Google

Sit $a = b$, $b \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a} = \sqrt{(2ax - x^2)}$, ideo in hoc caſu ellipſis degenerat in circulum, ac linea AM, itemque circulus ONM evaneſcit.

Sit $b = o$, $b \frac{\sqrt{(2ax - x^2)}}{a} = o$; ideo in hoc caſu ellipſis degenerat in lineam rectam BAP; ac $MB = \frac{1}{2} AB$. Hoc eſt Problema Newtoni [*a*]

Corollarium 1. (§. 67.)

Hinc poſito quod Corpus aliquod attrahens foret in A, Corpus M attractum pergeret in circulo MNO (§. 24.); at ſi ulterius corpus M reſpectu Corporis B fiat attrahens, corpus B pergens ſemper in circulo eodem manente quidem continuo eadem diſtantia MB deſcribet ellipſim; & quamvis phænomena hipoteſi hujuſmodi non ancillentur, intelligendæ tamen ſunt in Corporibus cæleſtibus, ſi in ellipſi moventur, leges conſimiles, licet dempta intelligantur corpora A, & M, ac poſitum unicum attrahens in v focum ellipſis. Unde vides non omnia in hiſce conſequi ex viribus centralibus; & inde factum eſt, quod olim cogitarem leges exponere mechanicas omnes, non ſolum longitudinis, ſed & latitudinis, declinationis, oſcillationiſque motus, & cujuslibet Corporum cœleſtium omnium, ac ad ſimpliciores normas easdem reddere, quæ non conſequuntur ex lege vis centralis abſolutæ [§. 17.], ſed quæ ſequuntur ex lege centrali reſpectiva (§. 27.), aliiſque poſitis, quæ leges ex vi centrali abſolutè ſpectata (§. 24.) conſequi nequeunt, ſed requirunt in corpore attracto leges nonnullas antea poſitas; & ſi orbis literarius huic primo opuſculo prodito faveat, fortaſſe ſecundum illud in lucem prodibit.

Scholion 1. [§. 68.]

Cæterum alia plura ſunt in Opere illo Newtoni egregio, quæ

[a] *Ibidem ſect. VII. prop. 32. lib. 1. pag. 105.*

Digitized by Google

quæ emendanda veniunt, ſed piget omnia huc tranſcribere, ac pudet ſingillatim ad trutinam revocare talem virum, qui ita in literaria Repuplica eſt bene meritus, quod mereretur ut abſque vexationibus opus ſuum cæteroquim egregium denuo limatum prodeat.

Scholion 2. [§. 69.]

Monendum eſt etiam, quod licet conſideraverim [§. 17.] vim centripetam attractivam, ut fecit Newtonus, fieri tamen poteſt ut expulſiva ſit, hoc eſt ut Corpus centrale haud attrahat, ſed expellat mobile in centrum decidens; quod quidem, licet in hiſce caſibus maneat idem, in ſyſtemate tamen planetario ex natura iſta Corporum diverſa multa variarent, & plura ſi non omnia eadem gauderent natura; quamobrem ex phænomenis, præſertim Lunæ, inveniendum an e corporibus Cæleſtibus exeat vis attractiva, ſive expulſiva. Criteria hujuſmodi in ſyſtemate Univerſi [§. 67.] ſub indicato do, ſed fuſius pluſquam hic tranſcribi liceat.

Scholion 3. (§. 70.)

Tandem ſi aliquid inconcinnum quoad ſcientiam, & methodum invenies, precor lector benigne ut excuſare velis, qui proprio Marte ab ipſo ſcientiarum limine latebras naturæ, ac matheſeos penetrare auſus, & ſtatim ac errata Newtoni ſuspicari cæpi decem dies edenda propoſui; nam ex huc uſque probatis agnoſcitur & viros cæteris doctores interdum decipi, etiam in matheſi, ſeu in ſcientia mechanica, quæ rite applicata errorem non admittit. Unde haud obſcure ait Pſalmiſta (*a*) *mendaces filii hominum in ſtateris*, ſcilicet in mechanica; quia mendaciter loquitur tam qui ſuadendo, quam qui probando decipit, ſeu tam qui sponte, quam qui incaute falſum pro vero venditat; quamobrem in ſtateris, ſeu in mechanica dicitur homo mendax, non quia ſtatera ſeu mechanica falſa ſit, ſed quod in applicatione decipimur. Agnoſcitur etiam dari in Mundo ultra leges virium centripetarum, alias

(a) *Pſalm. LXI. n.* 10.

alias plures, quam ſibi ſuaſerunt multi, quibus corpora ſanciuntur; ideo quoplus invenitur eo amplius inventu remanet, ut quiſquam ignorantiam ſuam fateri cogatur. Ut clarè loquitur Sapiens (*a*) *Mundum tradidit*, (ſcilicet Deus) *diſputationi eorum, ut non inveniat homo opus quod operatus eſt Deus ab initio uſque in finem*; quamobrem ſi vaticinium credamus, inutile eſſet ultra limites perquirere; nam ab initio uſque ad finem homo, mirabile dictu! opus Dei non inveniet. Sed quia Deus vult nos in ipſo occupatos ſcrutari Dei mirabilia debemus: & quia veritas inveniri nequit; ideo eſt iſta quodam modo occupatio peſſima; unde addit Sapiens: (*b*) *hanc occupationem peſſimam dedit Deus filiis hominum ut occuparentur in ea*. Cæterum (*c*) *confiteor tibi Pater domine Cœli, & Terræ quod abſcondiſti hæc ſapientibus, & prudentibus, & revelaſti parvulis*.

N. P. A. I. P. S.

F I N I S.

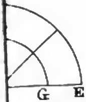
(a) *Eccleſiaſtes Cap.* 3. *n.* 11. (b) *Ibidem Cap.* 1. *n.* 13.
(c) *Mathei Evang. Cap. XI. n.* 25.

Digitized by Google

pag.	(§.)	lin.	ERRATA	CORRIGE.
6.	2.	4.	linea :	lineam
7.	4.	2, 3.	infiniteſimalia	infiniteſimales
16.			particula	particulas
		1.	argumentare	argumentari
17.		19.	curvam illam	curva illà
19.	27.	12, 18.	quod	quem

564

Digitized by Google



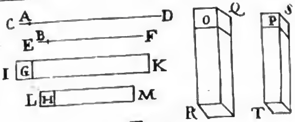


Fig: 2

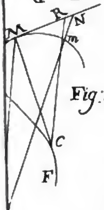
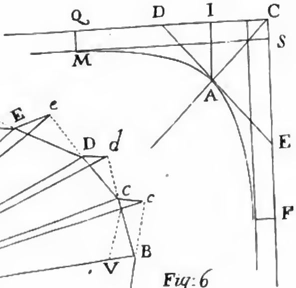


Fig: 3

Fig: 10



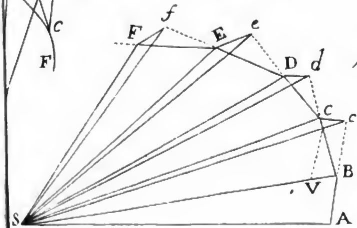
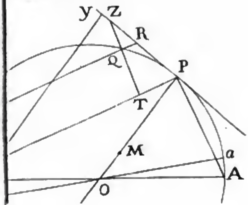


Fig: 6



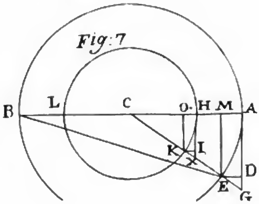


Fig: 7

Digitized by Google